АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОНИМАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А. Н. Аверкин

Исходя из понимания электромагнитных полей как аналитических функций определенного гиперкомплексного аргумента, показано, что кулоновское поле элементарных частиц не вносит своего вклада в их массы, которые, следовательно, носят исключительно «неполевой» характер. Показано так же, что потенциал Лиенара–Вихерта не адекватен реальной ситуации. Кроме того, дана геометрическая интерпретация электромагнетизма.

Алгебра биэфирионов

Как известно, электромагнитное поле может рассматриваться как аналитическая функция гиперкомплексного аргумента, который обычно называют бикватернионным [1, 2]. Бикватернион — это число вида

$$c = a + \imath b,$$

где a и b суть объекты вида

$$a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \equiv a_0 + \mathbf{a},$$

антикоммутирующие единицы i, j, k которого перемножаются по правилам:

$$ij = \imath k, \quad jk = \imath i, \quad ki = \imath j; \quad i^2 = j^2 = k^2 = -\imath^2 = 1.$$

Появляющаяся здесь единица $\imath$ представляет собой обычную коммутирующую мнимую единицу. В сущности, бикватернионные единицы являются обычными кватернионными единицами, умноженными на единицу $\imath$.

В настоящей работе мы, однако, будем пользоваться другой, более симметричной алгеброй, которую будем называть биэфирной. Это алгебра, родственная алгебре октав, отличается от алгебры бикватернионов тем, что в ней вместо мнимой единицы $\imath$ фигурирует четвертая антикоммутирующая единица l:

$$ij = lk, \quad jk = li, \quad ki = lj; \quad i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = 1.$$

Мы будем называть объекты $a = a_0 + \mathbf{a}$ эфирионами, а их удвоение

$$c = a + lb$$

— биэфирионами. Первое слагаемое биэфирионов назовем их эфирной частью, а второе — коэфирной. Операция сопряжения изменяет знак всех биэфирных единиц и переставляет их местами:

$$\overline{c} = \overline{a + lb} = \overline{a} - \overline{b}l = \overline{a} - lb, \quad \overline{cd} = \overline{d}\,\overline{c}.$$

Абсолютную величину биэфирионов будем обозначать прямым шрифтом

$$\mathrm{c}^2 = c\overline{c}.$$

Решительное преимущество биэфирионов при их использовании пользовании в теории поля заключается в том. Что их норма всегда оказывается действительным числом. Произведение двух эфирионов можно представить в виде

$$ab = a \circ b + l\mathbf{a} \times \mathbf{b};$$

$$a \circ b \equiv a \cdot b + a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a}, \quad a \cdot b \equiv a_0 b_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

В отличие от алгебры бикватернионов биэфирная алгебра не является ассоциативной — произведение трех и более биэфирионов зависит от порядка, в котором осуществляется их перемножение. Для правильного перемножения биэфирионов нужно пользоваться следующими правилами обращения с биэфирной единицей l:

$$\left(al\right)\left(lb\right)=ba;\quad \left(la\right)b=l\left(ba\right);\quad a\left(lb\right)=l\left(\bar{a}b\right).$$

Здесь a и b — эфирионы. Будучи неассоциативной, алгебра, биэфирионов сохраняет, подобно алгебре октав, свойство альтернативности умножения, которое, в самом общем виде означает, что произведение любого количества биэфирных сомножителей, составленное только из двух разных объектов (и объектов, им сопряженных), не зависит от последовательности умножений и, следовательно, может быть записано без скобок. Из этого свойства биэфирных чисел сразу следует так называемое «тождество восьми квадратов»:

$$\left(\mathrm{ef}\right)^2=\mathrm{e}^2\mathrm{f}^2.$$

Эфирный анализ

Если определить дифференциатор функций эфирного переменного (положено, что скорость света равна единице), как

$$\partial=\partial_0+\boldsymbol{\partial}\equiv\frac{\partial}{\partial x_0}+i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3},$$

то условие аналитичности таких функций будет иметь тот же вид, что и для функций комплексного аргумента:

$$\bar{\partial}F=0.$$

Мы будем называть его условием аналитичности Максвелла. Биэфирную аналитическую функцию, если она имеет вид

$$F=E_0+\mathbf{E}-l\mathbf{H},$$

будем называть аналитическим полем. Условия Максвелла будет удовлетворены, если аналитическое поле порождается эфирным гармоническим потенциалом A, являющимся решением уравнения д'Аламбера:

$$F=\partial A;$$

$$E_0=\partial_0 A_0+\boldsymbol{\partial}\cdot\mathbf{A};\quad \mathbf{E}=\boldsymbol{\partial}A_0+\partial_0\mathbf{A};\quad \mathbf{H}=\boldsymbol{\partial}\times\mathbf{A}.$$

Сравнивая биэфирную форму записи поля с тензорной, можно определить соответствия

$$x \leftrightarrow x_i; \quad A \leftrightarrow A_i;$$
$$\mathbf{E} - l\mathbf{H} \leftrightarrow F_k^{\bullet i} = (\mathbf{E}, -\mathbf{H}); \quad E_0 \leftrightarrow E_0 \delta_k^i.$$

Обычно скалярное поле устраняют тем, что налагают на потенциал релятивистски инвариантное условие Лоренца. Мы, однако, не будем этого делать, доверяя математике. При этом условие Максвелла в отсутствие заряженных частиц будет иметь вид следующей системы уравнений

$$\partial \cdot \mathbf{E} = \mathrm{j}_0; \qquad \partial \cdot \mathbf{H} = 0;$$
$$\partial \times \mathbf{H} - \partial_0 \mathbf{E} = 0; \qquad \partial \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{H} = \mathbf{j};$$
$$\mathrm{j} = \overline{\partial} E_0$$

(в рационализированной системе единиц).

Условия Максвелла допускают, кроме обычных электромагнитных волн, решения в виде волн продольных. Таковым, например, является решение вида

$$F = (n_0 - \mathbf{n}) f_0(\overline{n} \cdot x); \quad \mathrm{n} = 0$$

В этом случае условием Максвелла будет система уравнений

$$\partial \cdot \mathbf{F} = \mathrm{j}_0; \quad \partial_0 \mathbf{F} = \mathbf{j}; \quad j \equiv -\partial f_0.$$

Таким образом, мы видим, что продольные волны представляют собой, в сущности, распространяющиеся со скоростью света волны, несущие электрический заряд. В этом смысле такого рода волны можно назвать кулоновскими.

О массе элементарных частиц

С чисто математической точки зрения существование аналитического поля в виде кулоновских волн является обязательным. Дело в том, что сами по себе уравнения Максвелла не имеют разумных решений — они должны быть дополнены не следующим из них уравнением сохранения зарядов–токов. В отличие от этого условия Максвелла уже содержат в себе закон сохранения электрического заряда.

Допустим, что в точке эфира $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ в некий момент времени возникла частица, которую можно называть электроном. Сохранение заряда теперь проявится в том, что одновременно с возникновением сингулярного заряда e в пространстве начинает распространяться сферически симметричная кулоновская волна, фронт которой будет нести заряд $-e$. Этот фронт будет оставлять после себя поле

$$F^{e0} = e\frac{\mathbf{r} - \mathrm{r}}{\mathrm{r}^3}; \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'.$$

Вполне очевидно, что закон сохранения энергии требует, чтобы плотность энергии этого остающегося после прохождения фронта продольной волны поля (будем по–прежнему называть его кулоновским) была равна нулю. В этом несложно убедиться и прямым вычислением соответствующего тензора энергии–импульса, исходя из лагранжиана продольной волны

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\mathrm{F}^e\right)^2$$

Таким образом, мы приходим к выводу, важность которого трудно переоценить, — кулоновское поле элементарных частиц не вносит вклада в их массы, которая всегда носит «неполевой» характер.

Поле движущегося электрона

В традиционной электродинамике поле, создаваемое частицей, движущейся по траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_0)$, определяется так называемым потенциалом Лиенара–Вихерта [3]

$$A = \frac{eu}{\overline{r} \cdot u},$$

где u — релятивистская скорость частицы, а интервал

$$r = (x_0 - x_0') + (\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}(x_0')$$

является «светоподобным» и время запаздывания между излучением сигнала и формированием поля в точке x определяется равенством $r\overline{r} = 0$.

Потенциал Лиенара–Вихерта описывает, в сущности, частицу конечных размеров, которую можно считать малой лишь по сравнению с ее расстоянием до других с ней взаимодействующих частиц; иначе говоря, эта частица является бесконечно малой лишь потенциально. Это обстоятельство приводит к тому, что на расстояниях, сравнимых с размером частицы существующая на сегодняшний день электродинамика оказывается противоречивой. В частности, учет запаздывающего влияния одних заряженных областей частей электрона на его же другие приводит к противоестественному результату — на движение изолированного электрона оказывает катастрофическое влияние им же создаваемое электромагнитное поле. Понимание актуально бесконечно малого электрона как частицы конечных размеров ведет, например, к возникновению пропорциональной «ускорению ускорения» лоренцевой силы торможения [4]

$$\mathbf{g} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

и, соответственно, к нарушению закона сохранения энергии–импульса.

Действительно, поскольку движущийся с ускорением электрон излучает энергию, его уравнение движения должно иметь вид

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v}\times\mathbf{H} - \mathbf{g}; \quad \dot{p}_0 = e\mathbf{E}\mathbf{v} - g_0.$$

Здесь четырехмерный вектор g представляет собой силу, тормозящую электрон, — эта сила может быть равна только энергии и импульсу, уносимыми излучаемым электроном в единицу времени электромагнитным полем. Если считать, что это поле соответствует потенциалу Лиенара–Вихерта, то оно описывается формулами [3]

$$\mathbf{E}^{rad} = e\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\mathbf{v})\times\dot{\mathbf{v}}\right]}{\mathrm{r}\left(1-\mathbf{nv}\right)^3};\quad \mathbf{H}^{rad} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}^{rad};\quad \mathbf{r} = \mathrm{r}\mathbf{n}.$$

Если проинтегрировать соответствующий этому полю тензор энергии–импульса по малой (чтобы не учитывать запаздывания) сферической поверхности, окружающей заряд, то именно эти потоки энергии и импульса следует приравнять четырехмерной силе торможения g. Вполне очевидно, что любая другая зависимость торможения от скорости электрона привела бы к нарушению закона сохранения энергии–импульса. При этом, конечно, энергия и импульс электрона не сохраняются, если рассматривать его в отрыве от излучаемого им электромагнитного поля.

Выражение для силы торможения электрона сильно упрощается при одномерном движении электрона вдоль постоянного электрического поля **E**. В этом случае

$$\mathbf{H}^{rad} = e\frac{\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{n}}{\mathrm{r}\left(1-\mathbf{nv}\right)^3},$$

и соответствующий вектор Пойнтинга будет

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{v}}{4\pi v}\left(\mathrm{H}^{rad}\right)^2.$$

Сила торможения электрона при этом примет вид

$$g_0 = \frac{e^2\dot{v}}{4\pi v}\int\frac{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{n}\right)^2}{\left(1-\mathbf{nv}\right)^6}\mathbf{n}d\mathbf{s};\quad \mathbf{g} = \frac{e^2\dot{v}}{4\pi v^2}\int\frac{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{n}\right)^2}{\left(1-\mathbf{nv}\right)^6}\mathbf{v}d\mathbf{s}.$$

Для нерелятивистского электрона, излучающего дипольным образом, сила торможения **g** в первом приближении равна нулю, а для потери им энергии мы будем иметь выражение

$$g_0 = \dot{\mathcal{E}} = \frac{2e^2}{3c^2}\dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^2}\left(\frac{eE}{m}\right)^2;$$

* * *

Не прибегая к потенциалу Лиенара–Вихерта, поле электрона, движущегося по некоторой заданной траектории

$$F = F^e + \mathbf{F}^{rad},$$

можно получить, исходя из поля покоящегося электрона, если придать ему скорость $\mathbf{v} = \partial_0 \mathbf{x}$ посредством соответствующего преобразования Лоренца. Преобразование потенциала A и поля $F = \mathbf{E} + E_0$ может быть записано в виде

$$A \to e^{-\frac{\beta}{2}} A e^{-\frac{\beta}{2}}; \quad F \to E_0 + e^{\frac{\beta}{2}} \mathbf{E} e^{-\frac{\beta}{2}} - l\left(e^{-\frac{\beta}{2}} \mathbf{H} e^{\frac{\beta}{2}}\right);$$

$$e^{\boldsymbol{\beta}} = u = u_0 + \mathbf{n}\mathrm{u}; \quad \mathrm{u} \equiv |\mathbf{u}|; \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{n}\mathrm{v}.$$

где u — релятивистская скорость частицы. В результате мы получим кулоновское поле движущегося электрона:

$$F^e = e\frac{-\mathrm{r} + \mathbf{n} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) u_0 - l\mathbf{r} \times \mathbf{n}\mathrm{u}}{\mathrm{r}^3}$$

(такого рода формулы можно получать без особых усилий, если представлять подлежащие преобразованию векторы в виде $\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n})$). Все фигурирующие здесь величины относятся к запаздывающему моменту времени. Поле покоящегося электрона можно получить, дифференцируя эфирный потенциал

$$A^{e0} = -e\frac{\mathrm{r} + \mathbf{r}}{\mathrm{r}^2}.$$

Если теперь преобразовать его по Лоренцу, то мы получим кулоновский потенциал движущегося электрона, продифференцировав который с учетом того, что [3]

$$\partial x_0' = \frac{\mathrm{r} - \mathbf{r}}{\mathrm{r} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}'}; \quad \mathbf{v}' \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dx_0'},$$

мы снова получим то же самое поле F^e.

Отметим, что, поле $\mathbf{F}^{e*}$, получаемое дифференцированием потенциала Лиенара–Вихерта, отличается от полученного нами поля $\mathbf{F}^e$, совпадая с ним только в том случае, если электрон движется прямолинейно, поскольку в этом случае можно считать, что $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}'(x_0 - x_0')$.

В отношении электромагнитного поля, излучаемого движущимся с ускорением бесконечно малым электроном, то мы должны просто сказать, что существует закон природы, согласно которому он излучает как движущийся диполь. В системе отсчета, в которой электрон в момент времени x_0 покоится, это поле будет иметь вид

$$\mathbf{E}^{rad} = -e\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{w}' \times \mathbf{r})}{\mathbf{r}^3}; \quad \mathbf{H}^{rad} = e\frac{\mathbf{w}' \times \mathbf{r}}{\mathbf{r}^2}.$$

Его можно получить, дифференцируя потенциал

$$\mathbf{A}^{rad} = -e\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{r})}{\mathbf{r}^3}.$$

Геометрический смысл электромагнетизма

Попробуем рассмотреть потенциал электромагнитного поля как малую деформацию пространства–времени

$$x' = x + oA,$$

где o — малый параметр. Если мы будем интересоваться только вращениями окрестностей r точек соответствующего пространства Минковского, то тензор его деформации будет

$$r_k' = \frac{o}{2}\left(A_{k,i} - A_{i,k}\right) r^k = \frac{o}{2} F_k^{\cdot i} r_i.$$

Такому пониманию потенциала мешает, однако, то обстоятельство, что при преобразовании Лоренца пространства–времени возникает дотоле отсутствующее постоянное во времени и пространстве электромагнитное поле. Нарушения принципа эквивалентности всех инерциальных систем отсчета можно избежать, если допустить, что пространство–время есть неархимедово многообразие [5], в котором реальностью являются бесконечно малые, но, тем не менее, отличные от нуля величины. Если при обычном взгляде на пространство–время все расстояния являются конечными, и бесконечно малыми они могут быть лишь потенциально, то в неархимедовом эфире бесконечно малые величины являются таковыми актуально — они не соизмеримы с величинами конечными. В неархимедовом эфире окрестность каждой его точки, фиксированной четырьмя действительными числами, представляет собой четырехмерную сферу инфинитезимального радиуса o — в математике эти окрестности называют *монадами* [6]. Инфинитезимальный размер мы должны приписать и элементарным частицам, которые, в электромагнитном смысле, являются полюсами аналитических функций. Только при таком их понимании они могут обладать массой, спином и другими параметрами, отличающими их друг от друга. Будучи несоизмеримыми с обычными расстояниями, инфинитезимальные требуют для своего измерения особых единиц длины — таковой может быть, например, Вольт.

Другим препятствием для отождествления эфирного потенциала с инфинитезимальными его деформациями является его неоднозначность — электромагнитное поле не изменится, если к потенциалу добавить аналитическую функцию аргумента $\bar{x}$. Этой неоднозначности можно избежать, если сказать, что для каждого электрона существует система отсчета, в которой его эфирный потенциал имеет вид

$$A = -e\frac{\mathrm{r} + \mathbf{r}}{\mathrm{r}^2} - e\frac{\mathbf{r}\times(\mathbf{v}'\times\mathbf{r})}{\mathrm{r}^3}.$$

Деформацию окрестностей эфирных точек при наличии электромагнитного поля можно рассматривать как малое Лоренцево их преобразование. При таком взгляде на аналитическое поле оно обретает геометрический смысл:

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{v}; \quad \mathbf{H} = 2\boldsymbol{\varphi}; \quad E_0 = 2\kappa.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — инфинитезимальная скорость окрестностей эфирных точек, $\boldsymbol{\varphi}$ — бесконечно малый угол их поворота, а κ — коэффициент относительного бесконечно малого сжатия–растяжения окрестностей эфирных точек. Отметим еще, что преобразование эфира аналитическими функциями является релятивистски конформным.

* * *

Аналитическая электродинамика, наделяя пространство–время физическим смыслом, возвращает ему смысл неподвижного эфира Френеля–Лоренца.

Специальная теория относительности нисколько не противоречит такому пониманию пространства–времени — она лишь утверждает, что свет имеет одну и ту же скорость во всех инерциальных системах отсчета. Однако Эйнштейну удалось всех убедить, что в мире все системы отсчета равноправны. При этом, чтобы объяснить безотносительность ускорения, Эйнштейн, вслед за Махом, относил ее к влиянию бесконечно удаленных звезд, что, однако, никак не следует из его же уравнений. Эйнштейн как–то афористично сказал, что, в отличие от ньютонианских представлений, надо считать, что при исчезновении материи исчезнут и пространство, и время. Это, однако, также не следует из его уравнений — в отсутствие материи они имеют решение в виде пустого пространства. И в этом пространстве поверхность воды во вращающемся ведре по–прежнему будет подниматься к краям.

Представляется, что в искривленном эфире неподвижная система отсчета определяется так называемыми гармоническими координатами [7]. Вот что сказал В. А. Фок по этому поводу: «…можно подчинить потенциалы тяготения таким дополнительным условиям, при которых координатная система определяется однозначно, с точностью до преобразования Лоренца. Эта координатная система, которую мы называем гармонической, представляет большую аналогию с обычной инерциальной системой координат» [8]. Представляется, что в пользу неподвижного эфира можно привести и, так сказать, философский аргумент: обладает ли какое–либо векторное или тензорное соотношение объективным содержанием, если их координатное представления является полностью субъективным?

Неподвижный эфир (поскольку нет ничего, с чем можно было бы сравнивать его скорость) представлялся некоторой «вещью в себе», которую, естественно, хотелось бы объявить фикцией. Однако открытие реликтового излучения делает абсолютную систему отсчета Ньютона видимой — эта та система, в которой все объемы реликтового излучения обладают равными нулю значениями импульса и механического момента. В сущности, только реликтовое излучение не связано своим происхождением с излучением движущихся заряженных частиц. В этой связи мы должны считать, что в абсолютной системе отсчета все реликтовые фотоны характеризуются поперечной калибровкой своих потенциалов: $\mathbf{A} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Imaeda*, Prog. Theor. Phys., 2, 133, (1950).
2. *K. Imaeda*, Nuovo Cimento, 32 B, №.1, 138 (1976).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля (том II), М.: Наука, 1967, § 63.
4. H. A. Lorentz, The theory of electrons, N. Y.: Columbia University Press, 1909 (перевод: Г. А. Лорентц, Теория электронов, М.: ГИТТЛ, 1953, стр. 85).
5. В. А. Успенский, Что такое нестандартный анализ?, М.: Наука, 1987, стр. 12.
6. *Ibid*, стр. 21.
7. Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили, Гравитация, М.: УРСС, 2004, стр. 71.
8. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М.: Издательство технико–теоретической литературы, стр. 474.